Di., 13.12.2016 Mathematik-Lk Q2-M (Kr)

2. Klausur 13/I (Q2.1) *(insgesamt 163 Punkte)*

Dauer: insges. 180 Minuten; hilfsmittelfreier Teil max. 40 min Name: ___www.r-krell.de___

Hilfsmittel: im Teil A keine!

* *Achte auf sorgfältige Darstellung mit vollständigem, nachvollziehbarem Lösungsweg!* *

Teil A: Hilfsmittelfreier Teil *(32 Punkte)* (max. 40 min; Abgabe bis 8:40 Uhr)

(1) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) [*2P*] Berechne von Hand den Vektor $\vec{y} = M \bullet \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) [*10P*] Berechne von Hand die Matrizen $K = M \bullet N$ bzw. $L = N \bullet M$ mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und gib an, ob die Matrizenmultiplikation kommutativ ist.

c) [*4P*] Berechne von Hand die Matrizen $G = M + N$ und gib an, ob die Matrizenaddition kommutativ ist.

d) [*8P*] Invertiere die Matrix N aus b), d.h. berechne N^{-1} von Hand (sofern möglich)

e) [*4P+4P=8P*] Stelle nur das Gleichungssystem auf (nicht lösen!) zur Berechnung

e1) der Fix-„punkte" bzw. Fixvektoren von M

e2) der Eigenvektoren von M zum Eigenwert λ (es soll kein charakteristisches Polynom herausgearbeitet werden; das erste Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit x, y und z reicht)

Nach Abgabe von Teil A vor Abholung des Taschenrechners bitte vor den Augen der Aufsicht mit [cos]+[7]+[AC/On] den Casio fx-CG 20 (erneut) im Prüfungsmodus starten!

Di., 13.12.2016 Mathematik-Lk Q2-M (Kr)

<u>2. Klausur 13/I (Q2.1)</u> *(insgesamt 163 Punkte)*

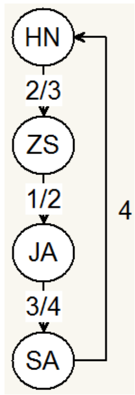
<u>Dauer:</u> 180 Minuten Name: ___www.r-krell.de___

<u>Hilfsmittel:</u> Taschenrechner Casio fx-CG 20, Formelsammlung

* *Achte auf sorgfältige Darstellung mit vollständigem, nachvollziehbarem Lösungsweg!* *

<u>Teil B</u> unter Verwendung der Hilfsmittel *(131 Punkte)*

2 *(93 Punkte)* Viele Menschen glauben, dass sie Erde regelmäßig von Aliens besucht wird. Neue Enthüllungen geheimer X-Files führen zu folgenden Erkenntnissen:



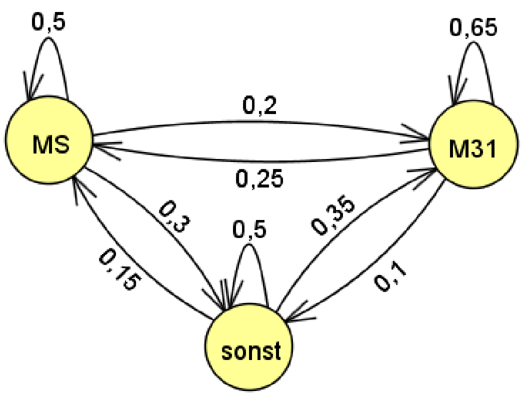
a) *(26 Punkte)* Aliens entwickeln sich aus einem Homunculus (HN), der nach 40 Tagen in einen gallertartigen Zwischenzustand (ZS) übergeht. Nach weiteren 40 Tagen entwickelt sich daraus ein blassgrüner Jung-Alien (JA), der nach weiteren 40 Tagen in einen grünen Senior-Alien (SA) übergeht. Letzterer hinterlässt nach 40 Tagen vier neue Homunculi, bevor er sich aus dem Leben verabschiedet. Leider sind Aliens recht empfindlich und nur ein Teil erreicht das nächste Stadium. Die Graphik zeigt die üblichen Übergangsraten für einen 40-Tage-Takt.

a1) [*8P*] Stelle eine Übergangsmatrix Ü auf, mit der sich bei gegebener Anfangsverteilung (z.B. 120 HN, 90 ZS, 40 JA und 30 SA) der Vektor der Folgeverteilung errechnen lässt. Berechne damit die Verteilung der vier folgenden Takte.

a2) [*3P*] Ermittle $Ü^4$ und erkläre damit die in a1) gefundene Periodizität.

a3) [*5P*] Bestimme (falls vorhanden) mit dem Taschenrechner eine/die Inverse $Ü^{-1}$ und erkläre, was sich damit berechnen lässt. Führe an einem eigenen Beispiel eine solche Berechnung aus.

a4) [*10P*] Berechne einen Fix-„punkt“ von Ü, d.h. eine Verteilung, die sich trotz Multiplikation mit Ü nie ändert. Dabei sollen immer 120 HN existieren. Beantworte außerdem, ob bei jeder beliebigen Matrix auch immer ein Fixpunkt existieren muss (welcher?)



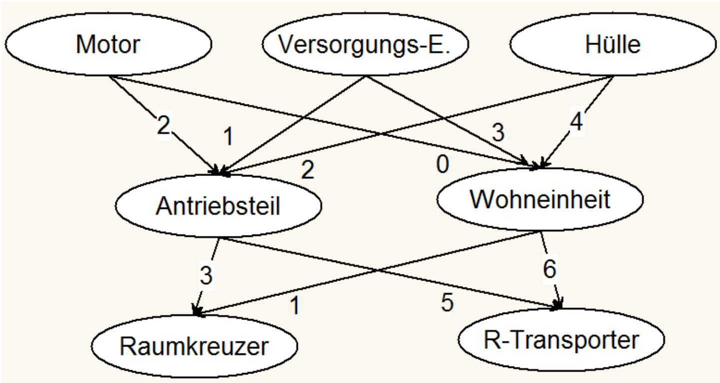
b) *(9 Punkte)* Aliens können dank Hyperraum-Technik schnell zu anderen Galaxien reisen. Da sie sich rasch langweilen, wechseln viele im 20-Tage-Rhythmus ihr Ziel (gezeigt sind die Übergangsraten zwischen der Milchstraße MS, der Galaxis M31 und allen sonstigen Galaxien nach 20 Tagen). Zur Zeit sind 3 500 Besucher in MS, 2 000 Touristen in M31 und 12 000 Aliens in sonstigen Galaxien.

b1) [*5P*] Stelle eine Matrix M auf, mit deren Hilfe man die Verteilung nach einem Zeittakt (20 Tagen) berechnen kann und berechne die neue Besucher-Verteilung.

b2) [*4P*] Alien-Reiseunternehmen wollen wissen, ob sich langfristig stabile Besucherzahlen für die Galaxien ergeben, sodass sich Investitionen in die touristische Infrastruktur lohnen. Gib durch Taschenrechner-Versuche begründete Prognosen ab!

<u>b.w.!</u>

c) [*12P*] Die Raumschiffe der Aliens werden nach dem Baukastenprinzip zusammengesetzt:



Stelle drei Matrizen X, Y und Z auf. Dabei soll mit X aus dem Vektor mit den Zahlen der Fertigprodukte (Raumkreuzer bzw. -Transporter) der Vektor der benötigten Zwischenprodukte (Antriebs- und Wohneinheiten) ermittelt werden können, während mit Y aus den Zwischenprodukten die benötigten „Rohstoffe" (Motoren, Versorgungseinheiten und Hüll-Elemente) berechnet werden sollen. Schließlich soll mit Z direkt aus den Fertigprodukten der Rohstoffbedarf berechnet werden können.
Führe mit allen Matrizen einmal eine Rechnung aus, um den Bedarf zu berechnen, wenn für die intergalaktische Raumflotte 10 Kreuzer und 30 Transporter neu bestellt wurden.

d) [*2P+2P+3P=7P*] Die Aliens verfügen über eine Superwaffe, die wirklich „alles platt macht", nämlich alles flach auf die x/z-Ebene zusammendrückt (und zwar durch Druck parallel zur y-Achse).
   d1) Stelle die Abbildungsmatrix P des Plattmachers auf.
   d2) Nenne die (Platt-)Bilder von C=(30 | -10 | 20) und von D=(2 | 1 | -1)
   d3) Ermittele (mit dem Taschenrechner) die Inverse P^{-1} oder begründe, warum es keine gibt.

e) [*17P*] Per Hyperraum-Technik kürzen die Aliens lange Wege in der 4. Dimension ab, bevor sie kurz vorm Ziel wieder in den normalen dreidimensionalen Raum eintauchen. Der vierdimensionale Hyperraum wird durch die vier orthogonalen Achsen x,y,z und w aufgespannt; im Moment befindet sich dort ein Raumschiff am (Hyper-) Punkt P=(32 | 10 | 25 | 550) und rast in Richtung $\vec{r}$. An welchem Punkt P ' wird es den dreidimensionalen Raum (=Hyperebene) mit w=0 erreichen? Stelle eine Matrix für diese Projektion längs $\vec{r}$ ins die (w=0)-Hyperebene auf, damit auch für weitere Fahrzeuge der Raumflotte, die sich parallel bewegen, leicht die Eintrittspunkte ins Dreidimensionale berechnet werden können.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 50 \end{pmatrix}$$

f) [*16P+6P=22P*] Im Dreidimensionalen angekommen, spielen die Aliens gerne mit ihren Strahlenwaffen, die zum Glück nur innerhalb von 0,85 Längeneinheiten Schaden anrichten. Gerade feuert ein Alien von T=(5 | 1 | 1) in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Spaß auf eine Häuserfront, die sich in der Ebene E: x + 2y – 1z = 4 befindet.
   f1) Berechne den Punkt S, wo der Strahl auf die Hauswand-Ebene E trifft (zur Kontrolle: S=(4,5 | 0,5 | 1,5)). Bestimme außerdem die Entfernung zwischen den Punkten S und T und entscheide, ob der Schuss Schaden anrichtet.
   f2) Gib eine einfache Gleichung an (nicht lösen), wie der Abstand (=kürzeste Entfernung) vom Punkt T zur Ebene E berechnet werden kann, und nenne die Richtung dieses Abstandes.

3 *(38 Punkte)* Verschiedenes

a) *(21 Punkte)* Matrizen können auch in der Kryptografie verwendet werden. Während man in Wirklichkeit mit 10x10-Matrizen oder noch größeren arbeitet, soll hier das Prinzip mit einer 2x2-Matrix gezeigt werden. Zunächst verwandelt man den Klartext buchstabenweise in Zahlen, z.B. sei Leerzeichen=0, A=1, B=2, C=3,.., Z=26. Aus dem Klartext „TEST“ wird so die Zahlenfolge 20 5 19 20. Bei eine 2x2-Matrix wird die Zahlenfolge jetzt in Paare bzw. in die beiden 2-zeiligen Vektoren $\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix}$ aufgeteilt, bei einer 10x10-Matrix in 10-zeilige Vektoren (der Rest wird mit Nullen aufgefüllt). Die beiden Kommunikations-Partner haben sich im Vorfeld bereits auf eine gemeinsame Matrix geeinigt, hier z.B. auf $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

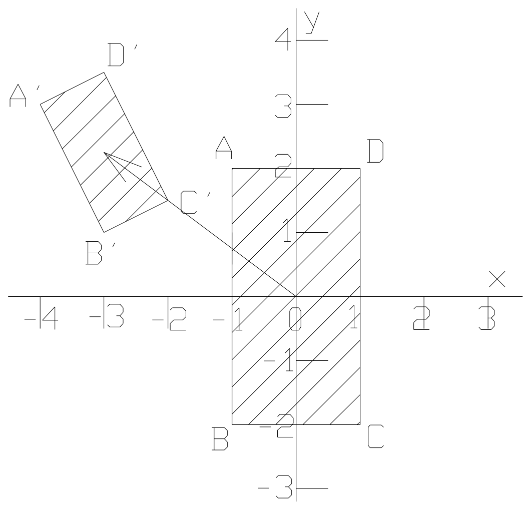
Zur Verschlüsselung werden alle (2er-)Vektoren des Klartexts mit K multipliziert. Die Ergebnis-Vektoren bzw. die daraus resultierende Zahlenfolge ist der Geheimtext, der verschickt wird.

a1) [*4P*] Bilde den Geheimtext zum Klartext „20 5 19 20“.

a2) [*5P*] Der Empfänger benutzt die inverse Matrix K^{-1} zum Entschlüsseln. Bestimme K^{-1} und entschlüssele damit den Geheimtext „45 12,5 58 19,5“

a3) [*12P*] Beantworte jeweils mit kurzer Begründung:
(1) Ist die Verschlüsselung mono- oder polyalphabetisch?
(2) Ist das Verfahren eher symmetrisch (klassisch) oder asymmetrisch (modern)?
(3) Ist jede mit beliebigen reellen Zahlen gefüllte Matrix K zur Verschlüsselung geeignet oder sollten bestimmte Bedingungen erfüllt sein?
(4) Warum sollten die Matrizen mindestens 10x10 oder größer sein?
(5) Ist das Verfahren bei großen Matrizen hinreichend sicher?

b) *(17 Punkte)* Ein Rechteck mit den Eckpunkten A=(-1|2), B=(-1|-2), C=(1|-2) und D=(1|2) soll verkleinert, gedreht und dann mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2{,}25 \end{pmatrix}$ verschoben werden, sodass das Bildrechteck A' B' C' D' mit den Eckpunkten A'=(-4|3), B'=(-3|1), C'=(-2|1,5) und D'=(-3|3,5) entsteht.



b1) [*6P*] Bestimme – z.B. durch Vergleich der Längen |AB| und |A' B' | – den Verkleinerungsfaktor und stelle eine geeignete Verkleinerungs-Matrix V auf.

b2) [*7P*] Bestimme erläutert und nachvollziehbar – z.B. aus dem Winkel zwischen geeigneten Geraden – den Drehwinkel α und stelle eine geeignete Dreh-Matrix D auf (zunächst allgemein mit sin(α) und cos(α), dann näherungsweise mit Kommazahlen).

b3) [*4P*] Gib nur an, wie man zur Matrix M kommt, um nach der Gleichung (*) $\vec{x}\,' = M \cdot \vec{x} + \vec{v}$ für jeden Punkt X den zugehörigen Bildpunkt X ' berechnen zu können (M soll nicht zahlenmäßig berechnet werden). Gib außerdem mit kurzer Begründung an, ob es sich bei (*) um eine lineare Abbildung handelt.