Mi., 25.11.2015 Mathematik Q1-M (Kr)

<u>2. Klausur 12/I</u> (A)

<u>Dauer:</u> 180 min (8:00-11:00 Uhr) *insges. 243 Punkte* Name: __www.r-krell.de__

<u>Hilfsmittel:</u> Taschenrechner (einfach und fx-CG 20), Formelsammlung „Das große Tafelwerk…“

* *Achte auf sorgfältige Darstellung mit vollständigem, nachvollziehbarem Lösungsweg!* *

1 Integrale mit Unter-/Obersumme (*42 Punkte*)

a) [*3+2+3+19=27 P*] Berechne $\int_1^2 f(x)\,dx$ mit f(x) = 3·x

a1) mit dem Hauptsatz und einer von dir gewählten Stammfunktion

a2) mit dem Hauptsatz und der Stammfunktion $F(x) = 1{,}5\,x^2 + 27$

a3) als Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$ der Obersumme $O_n = 4\frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot n}$

a4) mit der Untersumme U_n, wobei das Intervall [1; 2] in n Streifen gleicher Breite zerlegt werden soll. Gib zunächst an, ob bei der monoton steigenden Funktion der kleinste Funktionswert am linken oder am rechten Rand jedes Streifens zu finden ist. Fülle dann die Tabelle aus und stelle danach eine Term für U_n auf, den du immer weiter vereinfachst [1]) !

Streifengrenzen x_i =	x_0 $1+0\cdot\frac{1}{n}$	x_1	x_2	…	x_n $1+n\cdot\frac{1}{n}$
				…	
Streifenbreite	$\frac{1}{n}$			…	
Streifenhöhe (immer ☐ links / ☐ rechts) ausgerechnet	f( )			…	
				…	

b) [*15 P*] Bestimme die Obersumme für die Funktion $f(x) = 2\cdot x^2 + 1$ über dem Intervall [0; 3].

2 Stammfunktionen (*39 Punkte*)

a) [*2 P*] Nenne die Definition, wann F Stammfunktion einer anderen Funktion f heißt.

b) [*13 P*] Nenne für b1) drei verschiedene und sonst je eine Stammfunktion F zum gegebenen f.

b1) $f(x) = 8x^3 - 3x$ b2) $f(x) = 5x^3 - \frac{5}{7}x^2 + 8$

b3) $f(x) = k\cdot x^n$ für $n \neq -1$ b4) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-3} + 2x - 17{,}3$

b5) $f(x) = 22x^{17} - 400x^5 + \frac{1}{k}x^2$ b6) $f(x) = -x^{\frac{3}{8}}$

c) [*14 P*] Gib an, ob die Aussage wahr (w) oder falsch (f) ist:

( ) Ist F eine Stammfkt. von f, so gilt für alle $x \in \mathbb{D}$: $F'(x) = f(x) + c$ (mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$)

( ) Es gibt Funktionen, die nur zwei verschiedene Stammfunktionen haben

( ) Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f, so ist für alle $x \in \mathbb{D}$ die Differenz $F_1(x) - F_2(x)$ immer die gleiche, feste Zahl (bei der kein x mehr vorkommt)

( ) Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f_1 und f_2, dann ist $F_1(x) - F_2(x)$ eine Stammfunktion von $f_1(x) - f_2(x)$

( ) Hat eine Funktion f überhaupt eine Stammfkt. F, so hat f unendl. viele Stammfunktionen

( ) Auch wenn man von F eine nackte Zahl abzieht, ist die neue Fkt. eine Stammfkt. von f

( ) Es gibt Funktionen f, die keine Stammfunktion haben

---

[1]) vgl. Formelsammlung S. 52 (Analysis - Folgen und Reihen - Spezielle Partialsummen)

( ) Ist G eine Stammfunktion von g, dann ist $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = x \cdot g(x)$

( ) Ist G eine Stammfunktion von g, dann ist $F(x) = G(x) + 7x$ eine Stammfunktion von $f(x) = g(x) + 7$.

d) [*2+1+4+3=10 P*] Gegeben ist jetzt eine Stammfunktion F. Ermittle dazu je ein f(x)!

d1) $F(x) = 0{,}25\,x^4 - 3\,x$ d2) $F(x) = 2\,x^{12{,}5} + 206$

d3) $F(x) = (6x+2) \cdot e^{-3x}$

d4) Gibt es auch hier zu einem/jedem F(x) mehrere f(x)? (Ja/Nein mit kurzer Begründung)

3 Integrale (*29 Punkte*)

a) [*4+3+4+5+7=23 P*] Berechne (mit dem Hauptsatz)

a1) $\int_{-1}^{+1} (3x^3 - 4x)dx$ a2) $\int_{1}^{\pi} 4\sin(x)\,dx$ a3) $\int_{4}^{9} \frac{5}{\sqrt{x}}dx$

a4) Für den Mittelwert μ einer Funktion f über dem Intervall [a; b] gilt: $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$.

Berechne den Mittelwert μ von $f(x) = 2x^2 - 3x$ über [–1; 3]

a5) Bestimme k so, dass $\int_k^3 x^2\,dx = 6\frac{1}{3}$ wird.

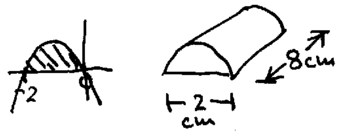
b) [*6 P*] Zeige: für alle integrierbaren Funktionen f (d.h. für alle f mit einer Stammfunktion F) gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

4 Flächen und Anwendungen (*97 Punkte*)

a) [*18 P*] Bestimme den Gesamt-Flächeninhalt zwischen dem Graph von $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ und der x-Achse im Intervall [–3; +3]

b) [*10 P*] Ein Schokoriegel (die vielleicht längste Praline der Welt) hat eine von der Parabel $f(x) = -1{,}4x^2 - 2{,}8x$ begrenzte Querschnittsfläche und ist 8 cm lang. Bestimme das Volumen (1 LE = 1cm)!



c) [*12 P*] Die Funktion f, $f(x) = -x^3 + cx$, kann mit der positiven x-Achse eine Fläche einschließen. Bestimme c so, dass diese Fläche den Wert $\frac{81}{12}$ hat!

d) [*18 P*] Eine ganzrationale Funktion (Polynom) vom Grad 2 geht durch den Ursprung und hat an der Stelle -3 ein Minimum (Tiefpunkt). Der Graph der Funktion schließt mit der x-Achse ein Fläche von 900 FE ein. Bestimme die Funktionsvorschrift! [2])

e) Berechne die Fläche, die durch die Graphen von f und g vollständig eingeschlossen wird:

e1) [*9 P*] zwischen $f(x) = x^3 - ½\,x$ und $g(x) = x^3 - x^2$

e2) [*16 P*] zwischen $f(x) = x^3 + x^2$ und $g(x) = 3x^2 + 3x$

f) [*14 P*] Die Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 2$ und der Geraden $g(x) = mx + 2$ (mit $m < 0$) sollen eine Fläche von 1⅓ FE einschließen. Bestimme m passend!

---

[2]) nur wenn die Umgekehrte Kurvendiskussion in 4d) gar nicht gelingt, so bestimme statt dessen wenigstens den Parameter a so, dass die (andere) Funktion $f(x) = x^3 + 2ax^2 + a^2x$ mit der x-Achse eine Fläche von $6\frac{3}{4}$ FE einschließt.

5 Probleme (*36 Punkte*)

a) [*19 P*] Berechne jeweils (für allgemeines b∈ℝ)

$$\int_3^b \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad \int_3^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_3^b \frac{1}{x^{0,5}}dx,\quad \int_3^b \frac{1}{x^{0,9}}dx,\quad \int_3^b \frac{1}{x^{1,5}}dx \text{ und } \quad \int_3^b \frac{1}{x^4}dx$$

Manche Integrale haben für $b \to \infty$ einen (endlichen) Grenzwert. Nenne die Integrale und Grenzwerte.

b) [*17 P*] Versucht man $\int_a^b \frac{1}{x}dx$ allgemein zu berechnen, stößt man auf eine Schwierigkeit. Begründe!

Andererseits lässt sich mit dem Taschenrechner der Graph von $f(x) = \frac{1}{x}$ darstellen und mit G-Solv lassen sich auch die Integrale von $a=e^1\approx 2{,}7183$ (Eulerzahl) bis b=3, b=4, b=5 oder b=6 berechnen. Notiere die vier vom Taschenrechner abgelesenen Integral-Werte und vergleiche die Ergebnisse mit (den ebenfalls aufzuschreibenden) Werten von ln(3), ln(4), ln(5) und ln(6). Welche Vermutung für eine Stammfunktion F liegt nahe, wenn man noch $\ln(e^1)=1$ berücksichtigt?