

Do., 6.10.2016

Mathematik M Q2M (Kr)

Einige Aufgaben vor der Klausur

www.r-krell.de

Teil I: ohne Hilfsmittel (keine TR, keine Formelsammlung)

- ① a) Gegeben sind jeweils die Geraden  $g$  und  $h$ .  
Prüfe zunächst, ob  $g$  und  $h$  parallel sind.  
Wenn ja, dann stelle fest, ob sie sogar identisch sind.  
Wenn nein, prüfe, ob/wo sich die Geraden schneiden.

$$a1) g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a2) g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- b) Im  $\mathbb{R}^2$  sind die beiden Geraden  $g: y=2x+3$  und  $h: y=2x-4$  gegeben.  
Verwandle a) die Gleichungen in Koordinatenform ( $Ax+By=C$ ) und b) in Parameterform  $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ .

Entscheide für alle Formen begründet, welche Lage die Geraden zueinander haben.  
Nenne außerdem eine Lage, die im  $\mathbb{R}^2$  (und höher) aber nicht im  $\mathbb{R}^2$  vor kommt.

Teil II: mit Hilfsmitteln (nach Absage der Lsg I)

- ② a) Bestimme die Schnittmenge der beiden Ebenen

$$a1) E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a2) E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$a3) E_1: 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$$

$$E_2: -3x_1 + 1,5x_2 - 2x_3 = 4$$

Bestimme außerdem von beiden Ebenen die Achsenabschnitte und erkläre, ob/wie das Ergebnis auch an den Achsenpunkten ablesbar ist.

Forts. (2)

b) Verwandle die Ebenendarstellung in eine andere Form:

b1)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  in die Koord.-form

b2)  $x + 2y + 2z = 8$  in die Parameterform

b3) die Ebene aus b1) in die Normalenform

c) Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{und } F: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

c1) Bestimme den Schnittwinkel der beiden Ebenen (bzw. ihrer Normalenvektoren) im Bogenmaß und in Grad und gib an, welche Lagen beider Ebenen zueinander möglich sind.

c2) Verwandle die Darstellung von E in eine Parameterform.

c3) Verwandle die Darstellung von F in eine Koordinatenform.

d) Besondere Ebenen

d1) Stelle die xz-Koordinatenebene (= Ebene, die von der x- und der z-Achse aufgespannt wird) in allen 3 Formen dar!

d2) Welche besondere Lage hat die Ebene

$$(1) \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) 4y = 16$$

③ Ein Schatz wird von Laserstrahlen "eingespart", Sensoren melden jede Unterbrechung und lösen Alarm aus.

a) Ein Strahl geht von  $A = (4, 1, 1)$  durch  $B = (3, 2, 3)$ .

Ermittele die Geradengleichung des Laserstrahls, den Schnittpunkt des Strahls mit der  $xy$ -Ebene sowie den Abstand der beiden Punkte A und B.

b) Einbrecher lassen vom Punkt  $P = (2, 3, 11)$  an der Decke senkrecht einen Haken an einer Schnur herunter - mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $0,5 \text{ m pro Sekunde}$ .

b1) Stelle eine Gleichung der Form  $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$  auf, die angibt, wo  $(\vec{x})$  sich der Haken zur Zeit  $t$  befindet!

b2) Prüfe ob/wann und wo der Haken den Laserstrahl aus a) unterbricht.

④ Gegenseitige Lage von 3 Ebenen.

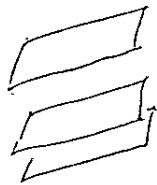
Wie kann das gemeinsame Schnittgebilde von 3 Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  aussehen?

Versuche, dir alle Möglichkeiten vorzustellen,

skizziere oder beschreibe und überlege,

wie man die Lage an der Lösung des Gleichungssystems erkennt, dessen Zeilen

aus den Koord.-gleichungen der 3 Ebenen bestehen.



---

Buch S. 460 - 542 ohne Abstände und Hesse-Normalform  
S. 554 - 556  
S. 562 - 569