Di., 18.10.2016 www.r-krell.de
Do., 6.10.2016 Mathematik M Q2M (Kr)

Einige Aufgaben vor der Klausur – Lösung

Teil I: ohne Hilfsmittel (kein TR, keine Formelsammlung)

① a) Gegeben sind jeweils die Geraden g und h. Prüfe zunächst, ob g und h parallel sind. Wenn ja, dann stelle fest, ob sie sogar identisch sind. Wenn nein, prüfe, ob/wo sich die Geraden schneiden.

a1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-10\\0\\5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches von $\begin{pmatrix}-10\\0\\5\end{pmatrix}$, nämlich $\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix} = -0{,}6 \cdot \begin{pmatrix}-10\\0\\5\end{pmatrix}$. Damit sind die beiden Richtungsvektoren kollinear und die Geraden parallel.

Liegt auch der Verbindungsvektor $\vec{b}-\vec{a}$ der beiden Punkte auf den Geraden / ist kollinear zu einem (und damit beiden) Richtungsvektoren, wären die Geraden sogar identisch.

$\vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Tatsächlich ist $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = -0{,}2 \cdot \begin{pmatrix}-10\\0\\5\end{pmatrix}$ (oder $= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$)

Also sind die parallelen Geraden g und h sogar gleich!

a2) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}20\\2\\20\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$. Der für die oberen beiden Koordinaten gültige Faktor 2 liefert bei der z-Koordinate −12 statt −3: Richtungsvektoren nicht kollinear, Geraden nicht parallel.

Bleibt zu prüfen, ob die Geraden windschief sind oder genau einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Für einen solchen Schnittpunkt gilt

$$\begin{pmatrix}20\\2\\20\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix} \quad \left| -s\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}20\\2\\20\end{pmatrix}\right.$$

$$r\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix} - s\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7-20\\2-2\\2-20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-27\\0\\-18\end{pmatrix}$$

Forts. ① a2)

Das Gl.-syst.

$$\begin{array}{c|cc|c} & r & s & \\ \hline \mathrm{I} & 6 & -3 & -27 \\ \mathrm{II} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{III} & -3 & 6 & -18 \end{array}$$

lässt sich wegen der überflüssigen Zeile II reduzieren auf

$$\begin{array}{c|cc|c} \mathrm{I} & 6 & -3 & -27 \\ \mathrm{I}+2\mathrm{III} & 0 & 9 & -63 \end{array}$$

woraus $9s = -63 \mid :9$
$s = -7$

Hier kein Taschenrechner erlaubt, da ohne Hilfsmittel

und damit I: $6r - 3\cdot(-7) = -27 \quad \mid -21$
$6r = -48 \quad \mid :6$
$r = -8$

Es gibt also eine eindeutige Lösung, nämlich das Paar $(r, s) = (-8, -7)$. Zur Bestimmung des Schnittpunkts wird z.B. $r = -8$ in g eingesetzt:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} - 8\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20-48 \\ 0 \\ 20+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ 48 \end{pmatrix}$$, d.h. $S = (-28 \mid 0 \mid 48)$

---

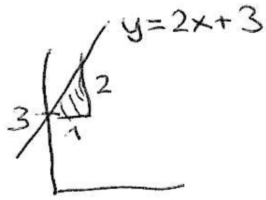
b) Im $\mathbb{R}^2$ sind die beiden Geraden $g: y = 2x+3$ und $h: y = 2x-4$ gegeben.
Verwandle a) die Gleichungen in Koordinatenform $(Ax + By = C)$ und b) in Parameterform $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

www.r-krell.de

Entscheide für alle Formen begründet, welche Lage die Geraden zueinander haben.
Nenne außerdem eine Lage, die im $\mathbb{R}^3$ (und höher) aber nicht im $\mathbb{R}^2$ vorkommt.

a) Koordinatenform $y = 2x+3 \mid -2x$
$g: \; -2x + 1y = 3$

sowie $y = 2x - 4 \mid -2x$
$h: \; -2x + 1y = -4$



b) Parameterform aus Analysis

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

bzw. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lage: Normalform $g: y = 2x+3$ und $h: y = 2x-4$:
Beide Geraden haben gleiche Steigung $(m=2)$, aber verschiedene Achsenabschnitte
$\Rightarrow$ parallel, aber nicht identisch

Koord.form: I $-2x + 1y = 3$
II $-2x + 1y = -4$

$$\begin{array}{c|l} \mathrm{I} & -2x + 1y = 3 \\ \mathrm{I}-\mathrm{II} & \quad 0 \quad\; 0 = 7 \end{array}$$ $\leftarrow 0 \neq 7$ ↯

Gl.-system unlösbar $\Rightarrow$ kein gemeinsamer Punkt. Da im $\mathbb{R}^2$ bleibt nur Parallelität mit $g \neq h$

Forts. ① b): Lage aus Parameterform

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Gleiche Richtungsvektoren $\Rightarrow g \parallel h$ (parallel).
Ob auch gleich, wird an $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$ erkannt: $\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$ ist nicht kollinear zu $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (kein Vielfaches) $\Rightarrow g \parallel h$, aber $g \neq h$ (vgl. ① a1))

Teil II: mit Hilfsmitteln (nach Abgabe der Lsg I)

② b) Bestimme die Schnittmenge der beiden Ebenen

a1) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix} + p\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\12\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}-5\\2\\12\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - p\begin{pmatrix}\ldots\end{pmatrix} - q\begin{pmatrix}\ldots\end{pmatrix}$$

$$s\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}5\\-2\\-12\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}-2\\-6\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\2-1\\5-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem mit 3 Gln. in 4 Variablen (unterbestimmt) hat entweder keine oder viele Lösungen

keine ↑ Ebenen parallel (aber nicht identisch)

viele ↑ 1 Variable frei wählbar $\Leftrightarrow$ Ebenen schneiden sich in einer Gerade

2 Var. frei wählbar $\Leftrightarrow$ Ebenen identisch

	s	t	p	q	
I	−1	0	5	−2	1
II	0	2	−2	−6	1
III	2	3	−12	−5	5

Lösung von Hand[x)]
oder mit Taschenrechner (TR):
Menü A → F1 Lin. Gl.-syst. → 4 Unbekannte
Gl.-syst. eintragen, letzte (4. Zeile) bleibt „leer" (alles 0):
$\boxed{\text{SOLVE}}$ liefert unendl. viele Lösungen: $X = \frac{53}{2} - 2T$, $Y = 6 + 3T$, $Z = \frac{11}{2}$, T frei mit $X = s$, $Y = t$, $Z = p$ und $Z = q$

Damit schneiden sich die Ebenen in einer Geraden, nämlich (p und q in E_2 einsetzen):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix} + \frac{11}{2}\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\12\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-27{,}5\\2+11\\5+66\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-25{,}5\\13\\71\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} \leftarrow \text{Gleichung der Schnittgerade!}$$

5

---

x)

I	= I'	−1	0	5	−2	1
II	= II'	0	2	−2	−6	1
2I+III	= III'	0	3	−2	−9	7
I'	= I''	−1	0	5	−2	1
II'	= II''	0	2	−2	−6	1
3II'−2III'	= III''	0	0	−2	0	−11

$\rightarrow p = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$, q = frei wählbar a2) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$

und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$

Auch hier „Gleichsetzen" und Gl.-syst. lösen

$$\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} - p\ldots - q\ldots$$

$$\begin{array}{cccc|c} s & t & p & q & \\ -2 & 4 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{array}$$

Mit TR: Menü A, F1, Gl.-syst mit 4 Var eingeben
Lösung $x = \frac{28}{5} + 4T$, $y = 1 + 3T$, $z = \frac{14}{5} + 2T$, $T = T$ bel.
mit $x = s$, $y = t$, $z = p$ und $T = q$.
Schnittgerade durch Einsetzen von p und q in E_2 (etwas leichter als s und t in E_1) liefert

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \left(\frac{14}{5} + 2q\right)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2 + \frac{14}{5}\cdot 1\\ 0 + \frac{14}{5}\cdot 2\\ 0 + \frac{14}{5}\cdot 0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\cdot 1 + 2\\ 2\cdot 2 + 0\\ 2\cdot 0 - 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}8\\5{,}6\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$$

---

a3) $E_1: \; 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$
$E_2: \; -3x_1 + 1{,}5x_2 - 2x_3 = 4$

Bestimme außerdem von beiden Ebenen die Achsenabschnitte und erkläre, ob/wie das Ergebnis auch an den Achspunkten ablesbar ist.

Gl.-syst lösen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ \text{II} & -3x_1 + 1{,}5x_2 - 2x_3 = 4 \end{array}$$

von Hand (oder mit TR)

$$\begin{array}{lccc|c} \text{I}' = \text{I} & 6 & -3 & 4 & 12 \\ \text{II}' = \text{I} + 2\,\text{II} & 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}$$

Das Gl.-syst. ist unlösbar $(0 \neq 20)$, d.h. es gibt keine Schnittmenge. Die Ebenen müssen parallel, aber verschieden sein.

Achsenabschnitte

	x_1-Achse	x_2-Achse	x_3-Achse
E_1	$\frac{12}{6} = 2$	$\frac{12}{-3} = -4$	$\frac{12}{4} = 3$
E_2	$\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$	$\frac{4}{1{,}5} = \frac{8}{3}$	$\frac{4}{-2} = -2$

Man erkennt, dass die Achsenabschnitte von E_2 immer das $-\frac{2}{3}$-fache der E_1-Abschnitte sind, d.h. die Ebenen sind parallel (aber nicht identisch)

die gleichen Vorzeich.

in Wirklichkeit liegen E_1 und E_2 auf versch. Seiten vom Ursprung wegen negativem Faktor $-\frac{2}{3}$

Forts. (2)

b) Verwandle die Ebenendarstellung in eine andere Form:

b1) $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ in die Koord.form

Das Beisp. 10.41 von Seite 501 des Buchs ist schlecht geeignet für den allgemeinen Fall. Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I}\quad x &= 6 - 6s + 2t \\ \text{II}\quad y &= 1 + 1s + 1t \\ \text{III}\quad z &= 1 + 1s - 1t \end{aligned}$$

wird z.B. aus III ein Term für t gewonnen:

$$\begin{aligned} \text{III}\quad z &= 1 + 1s - 1t \quad | +t - z \\ t &= 1 + 1s - z \end{aligned}$$

Ebenso wird aus II ein Term für s gewonnen:

$$\begin{aligned} \text{II}\quad y &= 1 + 1s + 1t \qquad \text{Einsetzen von } t \\ &= 1 + 1s + (1 + 1s - z) \\ &= 2 + 2s - z \quad | -2 \; | +z \\ y - 2 + z &= 2s \quad | :2 \\ \tfrac{1}{2}y - 1 + \tfrac{1}{2}z &= s \end{aligned}$$

Jetzt werden s und t in I eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{I}: x &= 6 - 6s + 2t = 6 - 6\left(\tfrac{1}{2}y - 1 + \tfrac{1}{2}z\right) + 2\left(1 + 1s - z\right) \\ x &= 6 - 3y + 6 - 3z + 2\left(1 + \tfrac{1}{2}y - 1 + \tfrac{1}{2}z - z\right) \\ x &= 12 - 3y - 3z + 2 + y - 2 + z - 2z \\ x &= 12 - 2y - 4z \quad | +2y + 4z \\ x + 2y + 4z &= 12 \end{aligned}$$

ist damit eine Koord.form!

b2) $x + 2y + 2z = 8$ in die Parameterform

Wie im Buch S. 502, Beisp. 10.42 wird z.B. nach x aufgelöst

$$x = 8 - 2y - 2z$$

und damit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

als Parameterdarstellung gefunden.

(Andere Möglichkeit: Über Achsenabschnitte bzw. die drei Punkte (8|0|0), (0|4|0) und (0|0|4) wird $\vec{x} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$ gebildet, also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-8\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix}$$

mit 4-mal so langen Richtungsvektoren wie)

b3) die Ebene aus b1) in die Normalenform

Die Normalform hat die Gestalt $(\vec{x} - \vec{a}) \circ \vec{n} = 0$.
Es gibt drei Möglichkeiten, eine solche Form zu erzeugen:

(1) aus der Koord.form von b1): $x + 2y + 4z = 12 \quad | -12$

$$x + 2y + 4z - 12 = 0$$

Forts. ②b3)(1)
lässt sich wegen $x+2y+4z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sofort ein Normalenvektor, nämlich $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, ablesen.
Gesucht wird noch ein Vektor $\vec{a}$ mit $-\vec{a} \circ n = -12$.
Setzt man willkürlich z.B. $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$, so reicht $a_3 = 3$, damit insgesamt

$$(\vec{x} - \vec{a}) \circ \vec{n} = \underline{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}} = 1x + 2y + 4z - 12 = \underline{0}$$

die unterstrichene Normalenform liefert.

---

(2) Aus der Parameterform mit Vektor-/Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underset{\text{Formelsammlg S. 64}}{=} \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 - (-6)\cdot(-1) \\ -6\cdot 1 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

oder TR Menü 1, F3 (>MAT/VCT), Vektoren als Vct A und Vct B eingeben, mit Exit zurück,
~~F1 (MAT/VCT)~~ OPTN, F2 (MAT/VCT), F6 (▷), F6 (▷),
F3 (CrossP), ~~V~~ F1 (Vct), A, ⊙, F1 (Vct), B), EXE

Damit ist $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 0$ eine Normalenform.

zwar mit anderem $\vec{a}$ und $\vec{n}$ als in (1), aber die beiden Normalenvektoren sind natürlich Vielfache: $\vec{n}_{(2)} = -2 \cdot \vec{n}_{(1)}$, weil kollinear.

(3) Aus der Parameterform durch Suche eines Normalenvektors $\vec{n}$, der zu beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal ist, d.h. das Skalarprodukt 0 liefert:

$$\vec{u} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = -6n_1 + 1n_2 + 1n_3 = 0$$

und $\vec{v} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 2n_1 + 1n_2 - 1n_3 = 0.$

Das homogene Gl.-system hat neben der trivialen Lösung $(n_1, n_2, n_3) = (0,0,0)$ noch unendlich viele weitere Lösungen; so ist z.B. n_3 frei wählbar (z.B. $n_3 = 12$), dann ist

	n_1	n_2	n_3	
I	−6	1	1	0
II	2	1	−1	0
I	−6	1	1	0
I+3II	0	4	−2	0

wegen II′ $4n_2 - 2n_3 = 0 \mid +2n_3 \Leftrightarrow 4n_2 = 2n_3 \mid :4$

$\Leftrightarrow n_2 = \frac{1}{2} n_3 \underset{\text{bei } n_3 = 12}{=} 6.$

Setzt man $n_3 = 12$ und $n_2 = 6$ in I ein, erhält man
$-6n_1 + 6 + 12 = -6n_1 + 18 = 0 \mid -18 \Leftrightarrow -6n_1 = -18 \mid :(-6)$
$n_1 = +3$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ ← wieder ein Vielfaches von $\vec{n}_{(1)}$ bzw. $\vec{n}_{(2)}$.

Als Punkt- oder Stützvektor nimmt man das $\vec{a}$ der Parameterdarstellung und erhält die Normalenform

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

Forts. 2

c) Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} = 0$$

und $$F: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 0$$

c1) Bestimme den Schnittwinkel der beiden Ebenen (bzw. ihrer Normalenvektoren) im Bogenmaß und in Grad und gib an, welche Lagen beider Ebenen zueinander möglich sind.

Bekanntlich (Formelsammlung S. 64) gilt für das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{m}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{n} \circ \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$$ wobei $\varphi = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{m})$ der eingeschloss. Winkel ist.

Berechnung von Hand $\vec{n} \circ \vec{m} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 2\cdot1 + 4\cdot0 + (-2)\cdot2 = -2$,

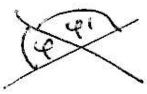
$|\vec{n}| = \sqrt{\vec{n} \circ \vec{n}} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24}$

$|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m} \circ \vec{m}} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$

Also ist $\varphi = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{24}\sqrt{5}}\right) = \cos^{-1}(-0{,}18257..) \approx 79{,}48°$ Gradmaß $\approx 1{,}754$ Bogenmaß

Das ist auch der gesuchte Winkel zwischen E und F

(Hinweis: Die Berechnung gelingt auch mit dem Taschenrechner. Im Menü 1 werden über F3 (▸MAT/VCT) die beiden Normalenvektoren als VCT A und VCT B eingegeben. Zurück mit EXIT. Dann mit OPTN, F2 (MAT/VCT), F6 (▷), F6 (▷) F4 (Angle( ), F1 (VCT), Alpha A, Komma, F1 (VCT), Alpha B,), EXE den Winkel zu $\varphi' = 100{,}52°$ berechnen. Auch dieser Winkel ist korrekt, da Nebenwinkel von φ.



Statt mit Angle(hätten auch die Zwischenschritte der Hand-Rechnung mit DotP(für das Skalarprodukt und Norm(für die Vektorlängen $|\vec{n}|$ bzw. $|\vec{m}|$ berechnet werden können – was aber unnötig ist.)

c2) Verwandle die Darstellung von E in eine Parameterform.

Auch hier gibt es mehrere Möglichkeiten.
(1) Umweg über eine Koordinatenform, die durch

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$$
$$= 2x + 4y - 2z - (6+8-2) = 2x + 4y - 2z - 12 = 0$$

bzw. $2x + 4y - 2z = 12$ schnell erhalten wird.
Dann weiter wie in 2 b2) zu $x = 6 - 2y + 1z$
und damit $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ als Parameterform von E.

Forts. ② c2)

(2) Direkt: Man sucht zwei nicht-parallele Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die orthogonal zu $\vec{n}$ sind, d.h. $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ und $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$ liefern. Damit die Richtungsvektoren wirklich nicht kollinear sind, kann man z.B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ansetzen.

Dann $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 \cdot u_3 = 0$, also $u_3 = 1$.

Ebenso $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 + 4 - 2v_3 = 0$, also $v_3 = 2$.

Als Stütz- oder Punktvektor $\vec{a}$ wird $\vec{a}$ aus der Normalenform genommen, sodass

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine (weitere) Parameterform ist.

---

c3) Verwandle die Darstellung von F in eine Koordinatenform.

Wie schon in c2)(1) gezeigt, ist Ausmultiplizieren des Skalarprodukts angesagt:

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1x + 2z - (4 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 2)$$

$$= 1x + 2z - 8 = 0 \quad \text{bzw.} \ | + 8$$

$$1x + 2z = 8$$ als Koord. form

---

d) Besondere Ebenen

d1) Stelle die xz-Koordinatenebene (= Ebene, die von der x- und der z-Achse aufgespannt wird) in allen 3 Formen dar!

(1) Parameterform $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) Normalenform $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ← y-Achse steht orthogonal auf Ebene

(3) Koordinatenform ist entweder durch Ausmultiplizieren von (2) (vgl. auch ② c2(1) und ② c3)) oder direkt aufstellbar, wenn man sich klar macht, dass die xz-Ebene nur auf der y-Achse einen Achsenabschnitt 0 hat – sonst keine.
Also $1y = 0$ (oder jeder andere Vorfaktor $\neq 0$ vor y).

---

d2) Welche besondere Lage hat die Ebene

(1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Forts. ② d2)

Die Ebene geht durch den Ursprung. Kein Richtungsvektor hat ein $x \neq 0$, d.h. die Ebene geht nicht in x-Richtung, muss also die y/z-Koord.-Ebene sein!

(2) $4y = 16$

Diese Ebene schneidet nur die y-Achse (bei $\frac{16}{4} = 4$), keine der beiden anderen Achsen. Sie muss also parallel zur x/z-Ebene sein und durch $(0|4|0)$ gehen.

③ Ein Schatz wird von Laserstrahlen „eingesperrt". Sensoren melden jede Unterbrechung und lösen Alarm aus.

a) Ein Strahl geht von $A = (4,1,1)$ durch $B = (3,2,3)$.
Ermittle die Geradengleichung des Laserstrahls, den Schnittpunkt des Strahls mit der xy-Ebene sowie den Abstand der beiden Punkte A und B.

(1) Geradengleichung $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) Die x/y-Ebene hat $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Gleichsetzen liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Big| - r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

	s	t	r	
I	1	0	1	4
II	0	1	−1	1
III	0	0	−2	1

Das Gl.-syst. ist schon dreieckig, III $-2r = 1$ liefert $r = -\frac{1}{2}$. Einsetzen von r in II führt zu
$1t - 1 \cdot (-\frac{1}{2}) = 1 \quad | -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Und r und t in I
$1s + 0 + (-\frac{1}{2}) = 4 \quad | +\frac{1}{2} \Leftrightarrow s = 4\frac{1}{2}$.

Zur Berechnung des Schnittpunkts reicht r (und die Sicherheit, dass das Gl.-syst. lösbar ist), eingesetzt in g:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. als Schnittpunkt $S = (4{,}5 | 0{,}5 | 0)$, wobei in der x/y-Ebene natürlich $z = 0$ sein muss.

Forts. ③ a)

(3) Der Abstand zweier Punkte ist die Länge des Verbindungsvektors $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$,

d.h. Abstand $= |\vec{d}| = \sqrt{\vec{d} \circ \vec{d}} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1+1+4}$
$= \sqrt{6} = 2{,}449..$

Vermutlich lohnt es nicht, den Taschenrechner zu bemühen, dort $\vec{d}$ einzugeben oder auszurechnen und dann mit norm(die Länge zu bestimmen.

---

b) Einbrecher lassen vom Punkt $P = (2,3,11)$ an der Decke senkrecht einen Haken an einer Schnur herunter – mit einer konstanten Geschwindigkeit von 0,5 m pro Sekunde.

b1) Stelle eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ auf, die angibt, wo ($\vec{x}$) sich der Haken zur Zeit t befindet!

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\11\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

Der Haken senkt sich nur in z-Richtung, daher $x=0$ und $y=0$. Die Höhe in z-Richtung nimmt pro Sekunde um 0,5 m ab.

---

b2) Prüfe ob/wann und wo der Haken den Laserstrahl aus a) unterbricht.

Die Gleichung aus b1) wird als Geradengleichung h aufgefasst. Gesucht ist jetzt der Schnitt von h mit der Gerade g aus ③a)(1). Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear/parallel, daher Gleichsetzen

$$\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\11\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\-0{,}5\end{pmatrix} \quad \left| -t\begin{pmatrix}0\\0\\-0{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\right.$$

	t	r	
I	0	−1	2−4 = −2
II	0	1	3−1 = 2
III	0,5	2	11−1 = 10

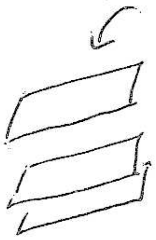
Dieses (überbestimmte) Gl.-system ist schon dreieckig △: aus I folgt $-1r = -2 \Leftrightarrow r = 2$, aus II folgt $r = 2$ (zum Glück gleich!),

Aus III wird
$$0{,}5t + 2 \cdot 2 = 10 \quad |-4$$
$$0{,}5t = 6 \quad |:0{,}5$$
$$t = 12$$

Einsetzen z.B. von t in h liefert

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\11\end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix}0\\0\\-0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$, d.h. nach $t=12$ Sekunden befindet sich der Haken bei $P = (2|3|5)$ und schneidet/unterbricht den Laserstrahl aus a)(1) und löst Alarm aus.

④ Gegenseitige Lage von 3 Ebenen.
Wie kann das gemeinsame Schnittgebilde von 3 Ebenen im $\mathbb{R}^3$ aussehen?
Versuche, dir alle Möglichkeiten vorzustellen, skizziere oder beschreibe und überlege, wie man die Lage an der Lösung des Gleichungssystems erkennt, dessen Zeilen aus den Koord.-gleichungen der 3 Ebenen bestehen.



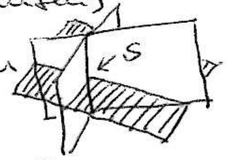
Sind die Ebenen E_1, E_2, E_3 durch die Koord.-formen

$E_1: \; A_1x + B_1y + C_1z = D_1$
$E_2: \; A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
$E_3: \; A_3x + B_3y + C_3z = D_3$ beschrieben,

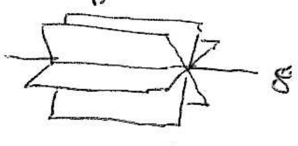
so kann dieses Gleichungssystem
(1) gar keine, (2) genau eine oder
(3) unendl. viele Lösungen haben, und zwar unendl. viele Lösungen mit (3a) einer frei wählbaren Variable oder (3b) sogar 2 frei wählbaren Variablen.

Dabei bedeuten
(1) alle Ebenen sind parallel, aber verschieden (= nicht alle drei gleich)
(siehe gegebenes Bild und Hinweis unten)

(2) die Ebenen schneiden sich in genau einem Punkt

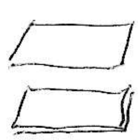
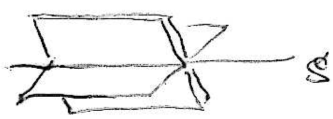


(3a) die Ebenen schneiden sich in einer gemeinsamen Gerade



(3b) die Ebenen schneiden sich in einer gemeinsamen Ebene, d.h. alle 3 Ebenen sind identisch.

Hinweis zur Zeichnung: Bei (1) und (3a) könnten auch 2 der 3 Ebenen identisch sein, also z.B.

(1)'  oder (3a)' 

leere Schnittmenge aller 3 Ebenen — Schnittmenge aller 3 Ebenen ist eine Gerade.

Bei (2) ist es nicht möglich, dass 2 Ebenen gleich sind (würde zu (3a)' führen statt zu einem Schnittpunkt).

Buch und Hilfsmittel

Buch : Brüggemann / Fredebeul u.a.:
: Mathematik Allg. Hochschulreife – Techn. Richtung
Cornelsen (Berlin) [1]2007, ISBN 978-3-464-
-41207-7

Formelsammlung:
Das große Tafelwerk – interaktiv.
Cornelsen / Volk u. Wissen.
ISBN 3-464-57148-3 bzw. 3-06-020788-7

Taschenrechner
Casio fx-CG20

Andere Lösungen?

- Alle drei Darstellungen (Parameter-, Koordinaten- oder Normalenform) sind nicht eindeutig.
  Zwar nicht jede, aber trotzdem unendlich viele verschiedene Darstellungen können richtig sein.
  Bei der Koordinatenform müssen die verschiedenen Gleichungen, bei der Normalenform zumindest die Normalenvektoren Vielfache voneinander sein.
- Auch meine Lösungen können (Ab-)Schreib- oder Rechenfehler enthalten. Für Hinweise per Mail bin ich dankbar!