
Inhalt....: Volumen einer Weinflasche als Rotationskörper
 Kategorie.: Unterrichtsmaterial
 Mathematik: Analysis
 MuPAD.....: 3.1.1
 Datum.....: 2005-04-04
 Autoren...: Robert Krell <krell@web.de>
 Funktionen: -->, piecewise, solve, plot, plot::XRotate, int, float
 Freitext..: Rotationskörper, Umgekehrte Kurvendiskussion ("Steckbrief-Aufgabe")
 Freitext..: <http://www.r-krell.de>

Äußeres Volumen einer kleinen Weinflasche

Als praktisches Beispiel für einen Rotationskörper wurde eine Weinflasche vermessen und ihre Form durch den Graph einer abschnittsweise definierten Funktion nachgebildet, deren Stücke aus Polynomen 0. bzw. 3. Grades bestehen. Das für die (um die x-Achse) rotierende Funktion berechnete Volumen wurde mit dem im Tauchversuch ermittelten echten Volumen der Flasche verglichen.

Vorbemerkungen:

1. Dieses MuPAD-Notebook kann (weil die Weinflasche nicht mitgeliefert wird) nicht als fertiges Blatt mit in den Unterricht genommen werden, sondern soll dazu anregen, selbst verfügbare Körper in ähnlicher Weise zu behandeln oder von der Schülerinnen und Schülern behandeln zu lassen -- am besten in Gruppen, um unterschiedliche Messungen und Ansätze später miteinander vergleichen zu können.

2. Zu dieser Aufgabe wurde ich inspiriert durch die in einer MuPAD-Fortbildung sowie im Buch bzw. im Band 4 von "**Mathematik 1 x anders**" (S. 80 ff) [<http://schule.mupad.de/literatur/mlxa/band-4.pdf>] bzw. in http://schule.mupad.de/material/notebooks/Mensch_aergere_dich_nicht.html gezeigte Volumenbestimmung einer Spielfigur. Allerdings gefiel mir nicht, dass eine einfache Figur durch ein Polynom 6. Grades angenähert wurde, das ja bekanntlich bis zu 5 Extrema hat und deshalb viel zu wellig ist. Tatsächlich hat die Spielfigur am unteren Ende auch eine deutliche Einschnürung, weicht also erheblich von der realen Spielfigur ab. Die Volumenberechnung mit der erkennbar schlechten Näherung ist wenig sinnvoll. (Auf der Webseite <http://www.learn-line.nrw.de/angebote/cas/barzell.htm> von Frau Barzel, auf die die Aufgabenstellung -- aber nicht die in der MuPAD "Beispiellösung" -- zurückgeht, findet man Hinweise auf Alternativen).

Deshalb habe ich eine Körper gesucht (und mit der Weinflasche gefunden), der sich sinnvoll und einigermaßen genau mit einem Polynomansatz mit niedrigem Grad annähern lässt. Wenn Sie Ähnliches in Ihrem Unterricht durchführen wollen, achten Sie auf eine geeignete Flaschen- bzw. Körperform und vergessen Sie nicht die Rückführung des Modells in die Wirklichkeit mit einer Betrachtung möglicher Fehler -- sonst verkommt 'Anwendungsorientierung' zur beliebigen Dekoration!

Äußeres Volumen einer kleinen Weinflasche

Robert Krell (www.r-krell.de)



Die Weinflasche ist 19 cm hoch (inkl. Verschluss). Sie wird horizontal gelegt, x-Achse ist die Symmetrie-/Rotationsachse. Der Ursprung wurde auf Schülervorschlag in die Mitte der Flasche, also 9,5 cm über den (bzw. rechts vom) Flaschenboden verlegt.

Die Flasche besteht im Wesentlichen aus einem Zylinder mit $r = 3.3$ cm (für $-9,5 \leq x \leq -3,5$), einer durch die Funktion g zu beschreibenden Verjüngungszone ($-3,5 \leq x \leq 3,5$) und wieder einem (nahezu) zylindrischen Hals mit $r=1.1$ (für $3,5 \leq x \leq 9,5$).

Die Funktion g wird als kubisches Polynom angesetzt, damit eine erkannte Wendestelle auftreten kann

$$g := x \rightarrow a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$x \rightarrow a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Die Übergangsbedingungen zu den Zylindern führen zu folgenden 4 Gleichungen bzw. damit zu den Koeffizienten

```
solve({g(-3.5) = 3.3,
      g( 3.5) = 1.1,
      g'(-3.5) = 0,
      g'( 3.5) = 0},
      {a, b, c, d})
{[a = 0.01282798834, b = 0, c = -0.4714285714, d = 2.2]}
```

Im Unterricht war allerdings die Funktion g auf Schülervorschlag in einem um 2,2 nach oben

verschobenen Koord.-system berechnet worden, weil das verschobene g (hier g1) dann punktsymmetrisch ist und einem einfacheren Ansatz gehorcht: Es müssen nur noch 2 Koeffizienten bestimmt werden. (Alle Rechnungen im Unterricht erfolgten von Hand ohne MuPAD!)

```
g1 := x --> a1*x^3 + c1*x
x → a1·x3 + c1·x
solve({g1(-3.5) = 1.1,
      g1'(-3.5) = 0},
      {a1, c1})
{[a1 = 0.01282798834, c1 = -0.4714285714]}
```

Im Folgenden wird mit etwas stärker gerundeten Koeffizienten weiter gerechnet

```
a1 := 0.01283:
c1 := -0.4714:
```

Und durch Zurückverschieben erhält man für g (in der neuen Form als g2 bezeichnet, aber identisch mit dem oben berechneten g)

```
g2 := x --> g1(x) + 2.2
x → 0.01283·x3 - 0.4714·x + 2.2
```

Zur Kontrolle werden die Anschlusswerte überprüft; weitere Werte sollen mit der Schieblehre an der Flasche nachgeprüft werden, um die Realitätsnähe des Ansatzes zu prüfen (es werden natürlich unnötig viele bzw. irreführend viele Kommastellen angegeben, über die hier gesprochen werden muss -- s.u.):

```
g2(-3.5); g2(0); g2(3.5); g2'(-3.5); g2'(0);
g2'(3.5); g2(-2); g2(-1); g2(1); g2(2);
3.29981375
2.2
1.10018625
0.0001025
-0.4714
0.0001025
3.04016
2.65857
1.74143
```

1.35984

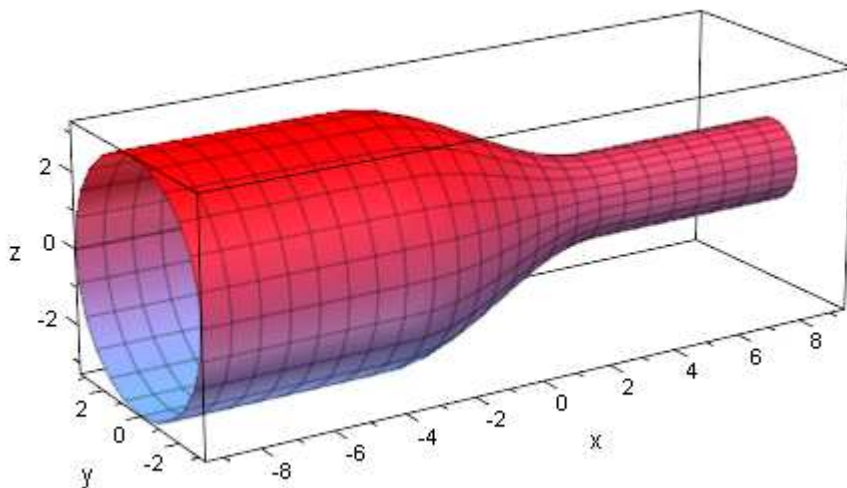
Insgesamt wird die Silhouette der Flasche also durch eine abschnittsweise definierte Funktion f beschrieben mit zwei Zylindern bzw. mit zwei konstanten Radien und dem Mittelstück g

```
f2 := x --> piecewise([x < -3.5, 3.3],
                    [x >= -3.5 and x < 3.5, g2(x)],
                    [x >= 3.5, 1.1])
```

$$x \rightarrow \begin{cases} 3.3 & \text{if } x < -3.5 \\ 1.1 & \text{if } 3.5 \leq x \\ 0.01283 \cdot x^3 - 0.4714 \cdot x + 2.2 & \text{if } x \in [-3.5, 3.5) \end{cases}$$

Der Graph bzw. der durch f bestimmte Rotationskörper sieht tatsächlich flaschenartig aus und ermutigt daher zum Weiterrechnen mit diesem Ansatz:

```
plot(plot::XRotate(f2(x), x = -9.5 .. 9.5),
      Scaling = Constrained):
```



Durch Integration von f (von Hand: mit stückweise gebildeten Stammfunktionen bzw. 3 Teilintegralen) in den Grenzen von $-9,5 \leq x \leq 9,5$ erhält man das (übertrieben bzw. schein-genaue) Ergebnis

```
AussenVolumen := int(PI*(f2(x))^2, x=-9.5..9.5);
float(AussenVolumen)
```

110.5930805 · π

347.4384091

Die Festlegung auf zwei oder höchstens drei signifikante Stellen wäre besser (da alle Maße auch nur mit zwei Stellen Genauigkeit aufgenommen wurden, mehr Exaktheit aufgrund des Ansatzes also gar nicht zu erwarten ist), wobei allerdings die von MuPAD ergänzte .0 etwas stört:

```
DIGITS := 3 :
float(AussenVolumen) ;
delete DIGITS:
347.0
```

Ob dies stimmt bzw. wie gut die Näherung der Flaschenform durch f ist, musste ein Tauchversuch der Flasche zeigen, wobei das verdrängte Wasser gemessen wird! Über mögliche Ungenauigkeiten und Fehlerquellen hinsichtlich der Näherung als auch der ersten (Durchmesser-)Messungen an der Flasche oder möglicher Fehler beim Tauchversuchs muss gesprochen werden!

Beim Tauchversuch verdrängte die Flasche 350 ml ! Das ist ein Fehler $< 1\%$, der allerdings nicht darüber hinweg täuschen darf, dass allein aufgrund der zweistelligen Messungen mit ca. 10% Fehler gerechnet werden muss und darüber hinaus einige Fehlerquellen existieren: unklare Zylinderlänge, ungenaue Messung (wird der untere Zylinder mit $r=3,2\text{cm}$ berechnet, treten schon 6% Fehler auf!), Flasche ist nicht wirklich rund, Näherung durch g bzw. g^2 entspricht nicht genau der Wirklichkeit (der Glasbläser hatte sicher kein Polynom als Vorlage), der Übergang vom Boden zum unteren Zylinderteil hat keine scharfe Kante, sondern ist mit etwa $r=0,5\text{ cm}$ abgerundet, usw.!

Anmerkungen:

1. In den Vorbemerkungen -- auf die hier extra verwiesen wird -- wurden auch bereits einige Webseiten mit weiterführenden Inhalten angegeben.
2. Für Rotationskörper mit Spline-Ansatz (der sinnvollerweise auch für die Mensch-Ärgere-Dich-Nicht-Figur durchgeführt werden sollte) gibt es im MuPAD-Material schon Beispiele, u.a. "**Rotationskörper, Polynom- und Splineinterpolation**" auf <http://schule.mupad.de/material/notebooks/SchneckeSpline.html> bzw. -.mnb
3. Für realistische Anwendungsorientierung setzt sich der Verein MUED e.V. ein: <http://www.mued.de/>
4. Der Autor dieses Beitrags unterhält eine Webseite zur Mathematik, Physik, Informatik und Fotovoltaik unter <http://www.r-krell.de>