Wiederholung/Übersicht: Lösen von Gleichungen bzw. Bestimmen von Nullstellen www.r-krell.de

1. Lineare Gleichungen
   haben immer genau eine Lösung

Beisp.: $3\cdot x - 12 = 0 \mid +12$
$3\cdot x = 12 \mid :3$
$x = 4$, d.h. $\mathbb{L}(x) = \{4\}$

2. Quadratische Gleichungen
   a) rein-quadrat. Gl. haben keine ($x^2 < 0$), genau eine ($x^2 = 0$) oder genau zwei Lösungen ($x^2 > 0$)

● $4\cdot x^2 + 12 = 0 \mid -12 \mid :4$
$x^2 = -3$, also $\mathbb{L}(x) = \emptyset = \{\ \}$ leere Menge
● $x^2 = 0$: $\mathbb{L} = \{0\}$ eine Lösung
● $x^2 = 5{,}29$: $\mathbb{L} = \{-2{,}3 ; +2{,}3\}$ zwei Lösungen

   b) gemischt-quadrat. Gleichungen
   b1) ohne absolutes Glied (d.h. es gibt keine Zahl ohne x) durch Ausklammern vereinfachen & lösen *)
   (eine der Lösungen ist x = 0)

● $3\cdot x^2 - 18\cdot x = 0 \mid$ x oder $3\cdot x$ ausklammern
$3\cdot x \cdot (x - 6) = 0$ *)
$3\cdot x = 0 \mid :3 \ \vee\ x - 6 = 0 \mid +6$
$x = 0 \ \vee\ x = 6$ also $\mathbb{L} = \{0 ; 6\}$

   b2) der Form
   $$x^2 + p\cdot x + q = 0$$
   und der Diskriminante $D = (p/2)^2 - q$
   – haben keine Lösung (bei D<0),
   – eine Lösung (bei D=0), nämlich $x = -p/2$
   – oder genau zwei Lösungen (bei D>0), nämlich:
   $x = -p/2 - \sqrt{D}$ oder $x = -p/2 + \sqrt{D}$)

● $2\cdot x^2 + 6\cdot x + 24 = 0 \mid :2$ Erst normieren!
$x^2 + 3\cdot x + 12 = 0$ $p = 3$, $q = 12$
$D = 1{,}5^2 - 12 = -9{,}75 < 0$ neg. Diskriminante
keine Lösung, d.h. $\mathbb{L}(x) = \emptyset$
● $x^2 - 8\cdot x + 16 = 0$ $p = -8$, $q = 16$
$D = (-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$ Diskr. = null
einzige Lsg.: $x = -(-4) = +4$, d.h. $\mathbb{L}(x) = \{4\}$
● $x^2 + 2\cdot x - 35 = 0$ $p = 2$, $q = -35$
$D = 1^2 - (-35) = 36 > 0$ pos. Diskriminante
$x = -1 - \sqrt{36} = -1 - 6 = -7$ insgesamt also
$\vee\ x = -1 + 6 = 5$ $\mathbb{L}(x) = \{-7; +5\}$

3. Kubische Gleichungen
   a) rein-kubische Gleichungen haben immer genau eine Lösung.

● $5\cdot x^3 - 135 = 0 \mid +135 \mid :5$
$x^3 = 27 \mid$ dritte Wurzel
$x = +3$ einzige Lsg., d.h. $\mathbb{L}(x) = \{3\}$
● $x^3 = -64 \iff x = -4$ also $\mathbb{L}(x) = \{-4\}$

   b) gemischt-kubische Gleichungen haben 1, 2 oder 3 Lösungen.
   b1) Ausklammern ist möglich, falls kein absolutes Glied (Glied ohne x) auftritt. Eine Lösung ist x = 0.

● $2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 5\cdot x = 0 \mid 2\cdot x$ ausklammern *)
$2\cdot x \cdot (x^2 - 1{,}5\cdot x - 2{,}5) = 0$
$2\cdot x = 0 \ \vee\ x^2 - 1{,}5\cdot x - 2{,}5 = 0$
$x = 0 \ \vee\ x = 2{,}5 \ \vee\ x = -1$ $\mathbb{L} = \{0 ; 2{,}5 ; -1\}$
└(mit p/q-Formel $p=-1{,}5$, $q=-2{,}5$)

   b2) Im allgemeinen Fall muss eine Lösung geraten werden. Nach der Polynomdivision können evtl. weitere Lösungen mit der p/q-Formel ermittelt werden.

● $x^3 - 6x^2 + 33x - 50 = 0$.
Geraten: x=+2. Polynomdivision durch (x-2)
$(x^3 - 6x^2 + 33x - 50):(x-2) = x^2 - 4x + 25$.
$x^2 - 4x + 25 = 0$ liefert wegen $D = -21 < 0$
keine weitere Lsg., also nur $\mathbb{L}(x) = \{2\}$

4. Gleichungen 4. Grades (und höher) können wir nur lösen, wenn sie sich durch Ausklammern
   oder durch Substitution (z.B. mit $z = x^2$) auf Gleichungen niedrigeren Grades zurückführen lassen!

● $x^4 + 3\cdot x^3 - 10\cdot x^2 = 0 \mid x^2$ ausklammern *)
$x^2 \cdot (x^2 + 3\cdot x - 10) = 0$, p/q für Klammer
$x = 0 \ \vee\ x = -5 \ \vee\ x = 2$ (p=3, q= -10)
● $x^4 - 17\cdot x^2 + 16 = 0 \mid z=x^2$
$z^2 - 17\cdot z + 16 = 0 \mid$ p/q-Formel p= -17, q=16
$z = 1 \ \vee\ z = 16$, also wegen $z=x^2$:
$x^2 = 1 \ \vee\ x^2 = 16$
$x=-1 \vee x=+1 \vee x=-4 \vee x=4$ $\mathbb{L} = \{-1; 1;-4; 4\}$

   Oder raten, Polynomdivision, nochmal raten, wieder Polynomdivision, usw., bis schließlich ein quadratischer bzw. lösbarer Term heraus kommt. Alle geratenen und berechneten Nullstellen sind die Lösungen. (Gleichungen *n*-ten Grades haben bis zu *n* Lösungen)

● $x^4 + 4\cdot x^3 - 27\cdot x^2 - 34\cdot x + 56 = 0$
Durch Ausprobieren geraten: x = +1
$(x^4 + 4\cdot x^3 - 27\cdot x^2 - 34\cdot x + 56) : (x - 1)$
$= x^3 + 5x^2 - 22 + 56$. Nullstelle x=-2 raten,
$(x^3 + 5x^2 - 22 + 56):(x+2) = x^2 + 3\cdot x - 28$.
p=3, q=-28, D=30,25: $x = -7 \vee x=4$
$\mathbb{L}(x) = \{+1; -2; -7; +4\}$

*) ein Produkt ist = 0, wenn einer der Faktoren = 0 ist. Also Faktoren bilden und einzeln = 0 setzen.